数理解析研究所講究録
1508巻 2006年 39-49

$U(\mathfrak{o}_n)$の中心元の構成

和地 輝仁 (北海道工業大学 総合教育研究部)

1 序

直交リー代数の普遍包絡環の行列式を用いた中心元は, 直交リー代数を交代行列全体で実現した場合はHowe-Umeda [HU91] で得られている. しかし, Howe-Umedaの構成は直交リー代数の実現に強く依存しており, 直交リー代数をsplit実現した場合, つまりカルタン部分代数が対角行列たちでとれる実現の場合は, 行列式を用いた中心元 [Wac] は2003年1月まで得られなかった. これは, Howe-Umedaによる構成を単純に模倣してもsplit実現のもとでは中心元が構成できなかったためである. Split実現における行列式を用いた中心元の構成が困難であった理由は, 「交換関係」などのキーワードで説明できるが, では逆に, [Wac] では何が本質的に働いて中心元が構成できたかという疑問が残る. この疑問を解決できれば, 直交リー代数の場合に限らず中心元の構成の本質の一端が解明できると思われる. 本講演の目的は, この疑問の解決に向けて, [Wac] において構成された中心元が中心に属することの証明を解説することである. 加えてこの論説では, 講演で話していない直交リー代数の普遍包絡環の中心元に関するいくつかの事実も述べることにする.

本論説の構成は以下の通りである. 第2節で, 直交リー代数のsplit実現における行列式を用いた中心元を構成し, いくつかのremarkをする. 第3節では, 構成した元が中心に属することを証明する. ここまでが講演の内容である. 第4節では, 第2節で構成したよりも'低次'の中心元を小行列を用いて構成する. 第5節では, 構成した中心元のHarish-Chandra同型による像を計算する. 第6節では, 構成した中心元が直交リー代数の普遍包絡環の中心の生成系をなすことを示す. 最後に第7節では, 構成した中心元が対称化された行列式を用いて構成された中心元と等しいことを示す.

2 中心元の構成

直交リー代数のsplit型の実現 $\mathfrak{o}_n$ は, 次のように定義される.

$$\mathfrak{o}_n = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})\,;\ {}^tXS_n + S_nX = 0\}, \qquad S_n = (\delta_{i,n+1-j})_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

また, E_{ij} を行列単位として, $\mathfrak{o}_n$ の元 F_{ij} と, F_{ij} を成分にもつ $n \times n$ 行列 $\mathbf{F}$ を次のように定める.

$$F_{ij} = E_{ij} - E_{n+1-j,n+1-i} \quad \in \mathfrak{o}_n,$$
$$\mathbf{F} = (F_{ij})_{1 \le i,j \le n} \quad \in \mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{o}_n)),$$

そして, 次で定める $C_n(u) \in \mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{o}_n))$ は, $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心に属することが第 3 節で示される.

$$C_n(u) = \det(\mathbf{F} + uI_n + \mathrm{diag}\,\tilde{\mathfrak{h}}_n). \tag{1}$$

ただし, $u \in \mathbf{C}$ であり, $\mathrm{diag}\,\tilde{\mathfrak{h}}_n$ は, 次の n-tuple $\tilde{\mathfrak{h}}_n$ から定まる n 次対角行列とする.

$$\tilde{\mathfrak{h}}_n = \begin{cases} (m-1, m-2, \ldots, 0; 0, -1, \ldots, -m+1) & (n = 2m), \\ (m - \frac{1}{2}, m - \frac{3}{2}, \ldots, \frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -m + \frac{1}{2}) & (n = 2m+1). \end{cases} \tag{2}$$

Remark 1. ここでの対角シフト $\tilde{\mathfrak{h}}_n$ は, 次のように直交リー代数の ρ-シフトと対応している. $n = 2m$ の場合, $\rho = (m-1, m-2, \ldots, 1, 0)$ であり, $\mathbf{F}$ の対角成分には, $(F_{11}, F_{22}, \ldots, F_{mm}; -F_{mm}, \ldots, -F_{11})$ と並んでいるので, $\tilde{\mathfrak{h}}_n = \rho(\mathrm{diag}(\mathbf{F}))$ である. また, $n = 2m+1$ の場合, $\rho = (m - 1/2, m - 3/2, \ldots, 1/2)$ であり, $\mathbf{F}$ の対角成分には, $(F_{11}, F_{22}, \ldots, F_{mm}; 0; -F_{mm}, \ldots, -F_{11})$ と並んでいるので, やはり $\tilde{\mathfrak{h}}_n = \rho(\mathrm{diag}(\mathbf{F}))$ である. ここで ρ は正ルートの和の半分で, その表示はカルタン部分代数の基底 $\{F_{11}, F_{22}, \ldots, F_{mm}\}$ の双対基底に関する座標を用いた.

行列式を用いた他の中心元についても対角シフトを見てみる. カペリによるカペリ恒等式 [Cap90] で用いられた対角シフトは, $\mathfrak{h}_n = (n-1, n-2, \ldots, 0)$ であったから, これも一般線型リー代数の ρ-シフトと対応しているといえる. しかし, Howe-Umeda [HU91] による中心元でも対角シフトは $\mathfrak{h}_n$ であり, これは直交リー代数の ρ-シフトと対応しているわけではない. 行列式を用いた中心元の構成で, 実現の違いに応じてどういった対角シフトを選べばよいかも, 問題として残っている. □

Remark 2. Split 実現では, $\mathfrak{o}_n$ の対角部分がカルタン部分代数としてとれ, 上三角部分をボレル部分代数にとれるため, $C_n(u)$ の Harish-Chandra 同型像は直ちに計算できる (Theorem 8). さらに, 中心元 $C_n(u)$ を, u のべき u^d や, u の下降階乗べき $u^{\underline{d}} = u(u-1)\cdots(u-d+1)$ で展開すると, その係数に $\mathbf{F}$ の小行列を用いた中心元が現れる. 文献 [Wac] では $u^{\underline{d}}$ で展開し, その係数に現れる中心元の Harish-Chandra 同型像を計算しているが, その表示は複雑である (Theorem 8).

この講究録にも収録されている伊藤稔氏の講演において, u を中心に上下両側に広がる階乗べき $u^{\overline{\underline{d}}}$ で $C_n(u)$ を展開すると, その係数として現れる中心元の Harish-Chandra 同型像が, 比較的単純に表示されることが発表された. □

Remark 3. Split 実現における $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心元 $C_n(u)$ は, 次の意味で $U(\mathfrak{gl}_n)$ のカペリ型中心元に対応する元である.

- 列-行列式で書けている.
- Harish-Chandra 同型像 (の最高次成分) が, ワイル群の不変式環の基本対称式に対応している.

この2点目を具体的に説明する. まず $\mathfrak{gl}_n$ の場合は, E_{ij} を行列単位として $\mathbf{E} = (E_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{gl}_n))$ とおくと, カペリ型中心元は

$$C_n^{\mathfrak{gl}_n}(u) = \det(\mathbf{E} + uI_n + \mathrm{diag}(n-1, n-2, \ldots, 0)),$$

であり, この Harish-Chandra 同型像は, カルタン部分代数の対称代数 $S(\mathfrak{h})$ の元 $(E_{11}+u)\cdots(E_{nn}+u)$ である. これを u の階乗べきで展開すると, その最高次成分は $E_{11},\ldots,E_{nn}$ の基本対称式となっている. 次に $\mathfrak{o}_n$ の場合, 中心元 $C_n(u)$ の Harish-Chandra 同型像は, $C_n(u)$ の定義より直ちに得られて (Theorem 8),

$$\begin{cases}(u^2-F_{11}^2)\cdots(u^2-F_{mm}^2) & n=2m\\ u(u^2-F_{11}^2)\cdots(u^2-F_{mm}^2) & n=2m+1\end{cases}$$

であり, これを u の階乗べきで展開するとその最高次成分は $F_{11}^2,\ldots,F_{mm}^2$ の基本対称式となっている. □

3 $C_n(u)$ が中心元であることの証明

この節では式 (1) で構成した $C_n(u)$ が $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心に属することを証明する. 行列式を用いた中心元の構成やカペリ恒等式の証明には, 外積代数の利用が有効である. n 次元ベクトル空間 $\mathbf{C}^n$ の標準基底を $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ とし, $\mathbf{C}^n$ の外積代数 $\bigwedge \mathbf{C}^n$ を考える. 一般の $n\times n$ 行列 $\Phi = (\Phi_{ij})$ に対して, $\eta_j = \sum_{i=1}^n e_i\Phi_{ij}$ と定めると,

$$\eta_1\eta_2\cdots\eta_n = e_1e_2\cdots e_n \det\Phi,$$

と η_j の積で Φ の列-行列式を表せる. ここに, 列-行列式 $\det\Phi$ は

$$\det\Phi = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(n)\Phi_{\sigma(1)1}\cdots\Phi_{\sigma(n)n},$$

で定義される. このような構成を, 外積代数を係数拡大した $R = \bigwedge \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{o}_n)$ において行い, $C_n(u)$ の表示を次のように得ることができる.

$$\eta_j = \sum_{i=1}^n e_iF_{ij}, \qquad \eta_j(u) = \eta_j + ue_j = \sum_{i=1}^n e_i(F_{ij}+u\delta_{ij}),$$
$$\eta_1(u_1)\eta_2(u_2)\cdots\eta_n(u_n) = e_1e_2\cdots e_nC_n(u).$$

ただし, ここに u_j は,

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (u, u, \ldots, u) + \tilde{\mathfrak{h}}_n$$

で定める. 以下でも u_j はこの定義で定まるものとする.

$C_n(u)$ が中心元であることを証明するためには, 任意の k, l に対して $[F_{kl}, \eta_1(u_1)\cdots\eta_n(u_n)] = 0$ を示してもよいが, ここでは証明に現れる式を簡単にするために, $R = \bigwedge \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{o}_n)$ に $\mathfrak{o}_n$ の作用を次のように入れる. この作用を利用して証明を実行することは, 単に証明の簡単のためであり, 本質的な問題ではない:

$$\mathfrak{o}_n \overset{\pi}{\curvearrowright} \mathbf{C}^n \text{ (ベクトル表現の双対)}, \qquad \mathfrak{o}_n \overset{\mathrm{ad}}{\curvearrowright} U(\mathfrak{o}_n) \text{ (随伴表現)}.$$

これにより $\mathfrak{o}_n$ の R 上の表現が, テンソル積 $\pi \otimes \mathrm{ad}$ により定まる.

次の補題は $\eta_j(u)$ たちの交換関係を与える.

Lemma 4. $u \in \mathbf{C}$ に対して, 次の交換関係が成り立つ.

(1) $\eta_i(u)\eta_j(u-1) + \eta_j(u)\eta_i(u-1) = -\delta_{i,n+1-j}\Theta$,

(2) $\eta_i(u)\eta_i(u-1) = -\dfrac{1}{2}\delta_{2i,n+1}\Theta$.

ここに $\Theta = \sum_{i,j=1}^{n} e_i e_j F_{i,n+1-j}$ である.

注意: $\mathfrak{gl}_n$ で $\mathbf{F}$ の代わりに $\mathbf{E}$ を用いて同様の構成をすると, (1) も (2) も右辺はゼロになる. Howe-Umeda の場合も含めて, 直交リー代数でこのような構成をすると右辺がゼロにはならず, その分中心元の構成が難しいと考えられる. また, (2) は (1) において $i = j$ としただけである.

Proof. (1) を証明する. まず, F_{ij} の交換関係

$$[F_{ij}, F_{kl}] = \delta_{jk}F_{il} - \delta_{li}F_{kj} - \delta_{j,n+1-l}F_{i,n+1-k} + \delta_{n+1-k,i}F_{n+1-l,j}. \tag{3}$$

と, $\eta_k\eta_l + \eta_l\eta_k = \sum_{i,j} e_i e_j [F_{ik}, F_{jl}]$ より,

$$\eta_k\eta_l + \eta_l\eta_k = \eta_l e_k + \eta_k e_l - \delta_{k,n+1-l}\Theta$$

を得る. ここで, $e_i\eta_j + \eta_j e_i = 0$ に注意すると, $\eta_k(u)\eta_l(u-1) + \eta_l(u)\eta_k(u-1) = \eta_k\eta_l + \eta_l\eta_k - \eta_l e_k - \eta_k e_l$ となるので, (1) が証明される. □

次の補題は $\eta_j(u)$ たちの上の $\mathfrak{o}_n$ の作用を与える.

Lemma 5. $u \in \mathbf{C}$ に対して次が成り立つ.

$$(\pi \otimes \mathrm{ad})(F_{kl})(\eta_j(u)) = -\delta_{jk}\eta_l(u) + \delta_{l,n+1-j}\eta_{n+1-k}(u).$$

Proof. まず左辺は,

$$(\pi\otimes\mathrm{ad})(F_{kl})\left(\sum_i e_i(F_{ij}+u\delta_{ij})\right)=\sum_i\Big\{\pi(F_{kl})(e_i)\cdot(F_{ij}+u\delta_{ij})+e_i\cdot[F_{kl},F_{ij}]\Big\}$$

となる. π は $\mathfrak{o}_n$ のベクトル表現の双対なので, $\pi(F_{kl})(e_i)=-\delta_{ik}e_l+\delta_{l,n+1-i}e_{n+1-k}$ である. これを, F_{ij} の交換関係 (3) を用いて計算すると右辺に一致する. □

Remark 6. 上の補題は, $\pi\otimes\mathrm{ad}$ を通しての $\mathfrak{o}_n$ の $\eta_j(u)$ 上の作用が, $\mathfrak{o}_n$ のベクトル表現の双対による e_j 上の作用と一致することを意味する. つまり, 次の写像は $\mathfrak{o}_n$-準同型である.

$$(\pi,\mathbf{C}^n)\to(\pi\otimes\mathrm{ad},R);\qquad e_j\mapsto\eta_j(u).$$

□

さて, この節の残りで $C_n(u)$ が中心元であることを証明する. なぜこのような構成で中心元が得られるのか, また, 対角シフトを式 (2) で定めた $\tilde{\mathfrak{h}}_n$ にとることが本質的にはどう効いているのかが証明を見てわかればよいのだが, 残念ながら今のところ満足のいく解答はない. 証明で行っていることは, 上記 2 つの補題, 特に Lemma 4 を使って $\mathrm{ad}(F_{kl})C_n(u)=0$ であることを地道に確かめることである. 途中の計算で現れる Θ も, 和をばらばらにする必要がある箇所がある.

まず, $e_1e_2\cdots e_n\in\bigwedge\mathbf{C}^n$ は $\pi(\mathfrak{o}_n)$ の 1 次元表現なので $\pi(\mathfrak{o}_n)$-不変である. したがって, 任意の k,l に対して $\mathrm{ad}(F_{kl})C_n(u)=0$ を証明するには, $\eta_1(u_1)\cdots\eta_n(u_n)=e_1\cdots e_nC_n(u)$ が $(\pi\otimes\mathrm{ad})(\mathfrak{o}_n)$-不変であることを示せばよい. つまり, 任意の k,l に対して, $(\pi\otimes\mathrm{ad})(F_{kl})(\eta_1(u_1)\cdots\eta_n(u_n))$ がゼロに等しいことを証明すればよい. Lemma 5 を用いると, $(\pi\otimes\mathrm{ad})(F_{kl})(\eta_1(u_1)\cdots\eta_n(u_n))$ は

$$-\eta_1(u_1)\cdots\eta_l(u_k)\cdots\eta_n(u_n)+\eta_1(u_1)\cdots\eta_{n+1-k}(u_{n+1-l})\cdots\eta_n(u_n)\tag{4}$$

に等しい.

($k=l$ のとき) 2 つの項はちょうどキャンセルするから式 (4) はゼロに等しい.

($k,l\le m$ かつ $k\ne l$ のとき) 式 (4) の第 1 項に $\eta_l(u_*)$ が 2 つ現れるが, どちらも m 番目より左にある. 従ってその範囲では交換関係の Lemma 4 (1) において, Θ が現れることなく $\eta_l(u_*)$ 2 つを並ぶように移動できる. 並んだら Lemma 4 (2) よりそれらはゼロになるから, 第 1 項はゼロである. 第 2 項も 2 つの $\eta_{n+1-k}(u_*)$ が後半にあるので, 同様にしてゼロになる.

残る (k,l) のすべてを調べる必要はなく, あとは $\mathfrak{o}_n$ を生成するために必要なものだけ調べればよい. つまり, $n=2m+1$ のとき, $(k,l)=(m,m+1),(m+1,m)$ を調べ, $n=2m$ のとき, $(k,l)=(m-1,m+1),(m+1,m-1)$ を調べればよい. $C_n(u)$ が中心元であることの証明のうち非自明な唯一の部分は, これら 4 つの場合に $(\pi\otimes\mathrm{ad})(F_{kl})(\eta_1(u_1)\cdots\eta_n(u_n))=0$ を示すことである. これら 4 つの場合のうち, 最初のひとつの場合の証明を以下で与える. 他の 3 つの場合も同様である.

($n = 2m+1$; $(k,l) = (m, m+1)$ のとき)

$$(\pi \otimes \mathrm{ad})(F_{m,m+1})(\eta_1(u_1)\cdots\eta_n(u_n)) = -\eta_1(u_1)\cdots\eta_{m+1}(u_m)\cdots\eta_n(u_n) \\ + \eta_1(u_1)\cdots\eta_{m+2}(u_{m+1})\cdots\eta_n(u_n). \quad (5)$$

ここで, パラメーター u_j のある因子が j 番目の因子である. まず, $u_m - u_{m+1} = 1/2$ に注意すると, 交換関係の Lemma 4 (2) より,

$$\begin{aligned}\eta_{m+1}(u_m)\eta_{m+1}(u_{m+1}) &= \eta_{m+1}(u_m)\eta_{m+1}(u_m - 1 + 1/2) \\ &= -\frac{1}{2}\Theta + \frac{1}{2}\eta_{m+1}(u_m)e_{m+1}.\end{aligned}$$

したがって, (5) の第 1 項は,

$$-\eta_1(u_1)\cdots\eta_{m-1}(u_{m-1})\left\{-\frac{1}{2}\Theta + \frac{1}{2}\eta_{m+1}(u_m)e_{m+1}\right\}\eta_{m+1}(u_{m+2})\cdots\eta_n(u_n)$$

に等しい.

次に, $u_{m+1} - u_{m+2} = 1/2$ に注意すると, 交換関係の Lemma 4 (2) より,

$$\begin{aligned}\eta_{m+2}(u_{m+1})\eta_{m+2}(u_{m+2}) &= \eta_{m+2}(u_{m+2} + 1 - 1/2)\eta_{m+2}(u_{m+2}) \\ &= -\frac{1}{2}e_{m+2}\eta_{m+2}(u_{m+2}).\end{aligned}$$

したがって, (5) の第 2 項は,

$$\eta_1(u_1)\cdots\eta_m(u_m)\cdot\frac{1}{2}e_{m+2}\eta_{m+2}(u_{m+2})\cdot\eta_{m+3}(u_{m+3})\cdots\eta_n(u_n)$$

に等しい. よって, これらをまとめると, (5) は,

$$\frac{1}{2}\eta_1(u_1)\cdots\eta_{m-1}(u_{m-1})\left\{\Theta + \eta_{m+1}(u_m)e_{m+1} - \eta_m(u_m)e_{m+2}\right\}\eta_{m+2}(u_{m+2})\cdots\eta_n(u_n) \quad (6)$$

に等しい. ここで, $u \in \mathbf{C}$ に対して, $\Theta = \sum_{i,j} e_i e_{n+1-j} F_{ij} = \sum_j \eta_j e_{n+1-j} = \sum_j \eta_j(u) e_{n+1-j}$ であるから, (6) は

$$\frac{1}{2}\eta_1(u_1)\cdots\eta_{m-1}(u_{m-1})\cdot\sum_{\substack{1\le j\le n \\ j\ne m,m+1}}\eta_j(u_m)e_{n+1-j}\cdot\eta_{m+2}(u_{m+2})\cdots\eta_n(u_n)$$

に等しい. さて, 列 $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ から, u_{m+1} を除いた列 $(u_1, u_2, \ldots, \widehat{u_{m+1}}, \ldots, u_n)$ は -1 ずつの等間隔であることと, 交換関係の Lemma 4 (1) より, 上の式の $\sum$ の中の $\eta_j(u_m)$ は $j < m$ ならば左へ, $j > m+1$ ならば右へ移動して, もうひとつの $\eta_j(u_*)$ に並んだら消える. よって, 上の式はゼロになり, $n = 2m+1$, $(k,l) = (m, m+1)$ のとき, $(\pi \otimes \mathrm{ad})(F_{kl})(\eta_1(u_1)\cdots\eta_n(u_n)) = 0$ が証明された.

4 Fの小行列を用いた中心元

$C_n(u+v)$ を v の下降階乗べき $v^{\underline{d}}$ で展開すると, $\mathbf{F}$ の小行列を用いた中心元 $C_d(u)$ が得られるが, $C_n(u)$ における対角シフト $\tilde{\mathfrak{h}}_n$ が, 等差数列をなしていないので, $C_d(u)$ の表示のため, 新たに $\tilde{\mathbf{F}}$ を用意する:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{cases} \mathbf{F} + \begin{pmatrix} 0_m & \\ & I_m \end{pmatrix} & (n = 2m), \\ \mathbf{F} + \begin{pmatrix} 0_m & & \\ & 1/2 & \\ & & I_m \end{pmatrix} & (n = 2m+1). \end{cases}$$

ここで 0_m は m 次の零行列である. すると,

$$C_d(u) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ \sharp I = d}} \det(\tilde{\mathbf{F}}_I + uI_d + \mathrm{diag}(d/2-1, d/2-2, \ldots, d/2-d))$$

である. ここで, $\tilde{\mathbf{F}}_I$ は I で定まる $\tilde{\mathbf{F}}$ の主小行列である. $d=n$ の時この表示は $C_n(u)$ の定義と一致している. この等式は, 差分作用素 $\Delta f(v) = f(v+1) - f(v)$ を用いて $C_n(u+v)$ を $v^{\underline{d}}$ で実際に展開することにより得られる (微分作用素 d/dv を用いてテイラー展開することの類似である). $\tilde{\mathbf{F}}$ を用意した理由は, 差分作用素 Δ を利用するために $\tilde{\mathbf{F}}$ への対角シフトが等差数列になるようにするためである.

中心元 $C_n(u+v)$ を展開したときの係数に現れるのが $C_d(u)$ だから, 直ちに次の Proposition を得る.

Proposition 7. $C_d(u)$ は $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心に属する. □

5 Harish-Chandra同型による像

中心元 $C_n(u)$ や $C_d(u)$ の Harish-Chandra 同型による像を与える. それを見ると, $C_d(u)$ を用いて $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心 $ZU(\mathfrak{o}_n)$ の生成系 (の一部) を与えることができることもわかる.

まず, Harish-Chandra 同型 $\overline{\gamma}$: $ZU(\mathfrak{o}_n) \to U(\mathfrak{h})^W$ を定義する. ここで, $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h} = \mathbf{C}F_{11} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}F_{mm}$ ($n=2m$ または $n=2m+1$) であり, $U(\mathfrak{h})^W$ は $U(\mathfrak{h})$ のワイル群不変元のなす部分代数を表す. F_{ij} $(i<j)$ を正ルートベクトル, F_{ij} $(i>j)$ を負ルートベクトルとするような $\mathfrak{o}_n$ の三角分解に関する射影を γ: $U(\mathfrak{o}_n) \to U(\mathfrak{h})$ とし, 正ルートの和の半分 $\rho \in \mathfrak{h}^*$ を $U(\mathfrak{h})$ に拡張したものも ρ で表すと, Harish-Chandra 同型 $\overline{\gamma}$ は写像の合成 $\overline{\gamma} = (\mathrm{id}_{U(\mathfrak{h})} - \rho) \circ \gamma$ で定義される. $\overline{\gamma}$ は $ZU(\mathfrak{o}_n)$ から $U(\mathfrak{h})^W$ への代数同型である.

Theorem 8. 複素数 u に対して $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心元 $C_n(u)$ の Harish-Chandra 同型による像は,

$$\overline{\gamma}(C_n(u)) = \begin{cases} (u^2 - F_{11}^2)\cdots(u^2 - F_{mm}^2) & (n = 2m), \\ u(u^2 - F_{11}^2)\cdots(u^2 - F_{mm}^2) & (n = 2m+1) \end{cases}$$

である. さらに $d \in \{1, \dots, n\}$ に対して, 中心元 $C_d(u)$ の像は,

$$\overline{\gamma}(C_d(u)) = \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (-1)^k \sigma_k \left\{ \frac{(-1)^{n-d}}{(n-d)!} \sum_{t=0}^{n-d} (-1)^t \binom{n-d}{t} (u + t - (n-d)/2)^{n-2k} \right\}$$

となる. ここで σ_k は, $F_{11}^2, \dots, F_{mm}^2$ に関する k 次の基本対称式を表し, $\lfloor d/2 \rfloor$ は $d/2$ を超えない最大の整数を表す.

Proof. F_{ij} $(i < j)$ が正ルートベクトルであることから, $C_n(u)$ の γ による像には, $C_n(u)$ の summands のうち σ が恒等置換であるもの, つまり行列の対角成分のみが寄与し, 対角シフトが ρ-シフトとちょうど対応していることから $C_n(u)$ の $\overline{\gamma}$ による像も上のようにわかる.

$C_d(u)$ の像に関しては, $C_d(u)$ の $\overline{\gamma}$ による像を直接計算するのではなく, $\overline{\gamma}(C_n(u+v))$ を $v^{\underline{d}}$ に関して展開する. そこでは第 2 種スターリング数があらわれるが, 二項係数を用いて書き直すと上の式が得られる. 詳細は省略する. □

Remark 9. Remark 2 でも触れたが, u を中心に上下両側に広がる階乗べき $u^{\underline{d}}$ で $C_n(u)$ を展開すると, その係数として現れる中心元の Harish-Chandra 同型像が, 比較的単純に表示されることが伊藤稔氏により明らかにされた. □

6 $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心の生成系

$n = 2m+1$ の場合は, $U(\mathfrak{h})^W$ は $F_{11}^2, \dots, F_{mm}^2$ の基本対称式で生成され, $n = 2m$ の場合は, $F_{11}^2, \dots, F_{mm}^2$ の基本対称式と $F_{11} \cdots F_{mm}$ で生成される. このことと, Theorem 8 の Harish-Chandra 同型による像から, $ZU(\mathfrak{o}_n)$ の生成系を与えることができる.

Proposition 10. $n = 2m+1$ の場合, $\{C_2(u), C_4(u), \dots, C_{2m}(u)\}$ は $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心の代数独立な生成系である.

$n = 2m$ の場合, $\{C_2(u), C_4(u), \dots, C_{2m-2}(u), C^{\mathrm{Pf}}\}$ は $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心の代数独立な生成系である. ただし, $C^{\mathrm{Pf}} \in ZU(\mathfrak{o}_n)$ は $F_{11} \cdots F_{mm}$ の $\overline{\gamma}$ による逆像である. □

上の命題で $n = 2m$ の場合の中心元 C^{Pf} は, 例えば次のように構成される (cf. [IU01, Žel73]). $2m \times 2m$ 交代行列 Φ に対して, パフィアン $\mathrm{Pf}\,\Phi$ を,

$$\mathrm{Pf}\,\Phi = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2m}} \mathrm{sgn}(\sigma) \Phi_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots \Phi_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}$$

と定め,

$$C^{\mathrm{Pf}} = \mathrm{Pf}(\mathbf{F}S_{2m})$$

と定める. ここで $\mathbf{F}S_{2m}$ は $2m \times 2m$ 行列の積であり, 交代行列となることに注意する. Harish-Chandra 同型による像を比較すると, 特に,

$$(C^{\mathrm{Pf}})^2 = (-1)^m C_{2m}(0)$$

である.

Theorem 8 より, $C_{2k+1}(u)$ は $C_2(u), C_4(u), \ldots, C_{2k}(u)$ で表すことが出来るから, Proposition 10 における生成系には d が奇数である $C_d(u)$ が含まれないのは当然であるが, さらに Theorem 8 の $\overline{\gamma}(C_d(u))$ の式のブレースの中身が, $u = 0$ で d が奇数の時にゼロになることがわかるので, 次の命題が得られる.

Proposition 11. d が奇数ならば $C_d(0) = 0$. □

7 他の中心元との関係

直交リー代数の普遍包絡環における, 行列式を用いて構成された中心元としては, 第 2 節で与えたものの他に Howe-Umeda [HU91] による中心元, Itoh-Umeda [IU01] による対称化された行列式を用いた中心元, Molev [Mol95] による Sklyanin determinant を用いた中心元がある. Howe-Umeda による中心元は, 交代行列による実現のもとでのみ構成できるものであったが, Itoh-Umeda によるものと Molev によるものは実現によらず構成が可能である. これら 3 つの中心元はいずれも Harish-Chandra 同型による像が知られており, それを見ると互いに (本質的には) 等しいことがわかる. ここでは, これら 3 つの中心元のうち, Itoh-Umeda による中心元と等しいことを述べる. ここでの証明は Harish-Chandra 同型の像が一致することを見る証明である.

$n \times n$ 行列 Φ に対して, 対称化された行列式 $\mathrm{Det}\,\Phi$ を

$$\mathrm{Det}\,\Phi = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma,\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma')\Phi_{\sigma(1)\sigma'(1)} \cdots \Phi_{\sigma(n)\sigma'(n)}$$

で定める. Φ の成分が互いに可換であれば, これは $\det \Phi$ に等しい. また, 対角シフト $(u_1, \ldots, u_n)$ のついた対称化された行列式 $\mathrm{Det}(\Phi; u_1, \ldots, u_n)$ を

$$\mathrm{Det}(\Phi; u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma,\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma') \times \\ (\Phi_{\sigma(1)\sigma'(1)} + u_1\delta_{\sigma(1)\sigma'(1)}) \cdots (\Phi_{\sigma(n)\sigma'(n)} + u_n\delta_{\sigma(n)\sigma'(n)})$$

で定める. すると, 対称化された行列式は, 各 summands において行の添字にも列の添字にも対称群が作用しており強い対称性をもつため, $\mathrm{Det}(\mathbf{F}; u_1, \ldots, u_n)$ は任意の $u_j \in \mathbf{C}$ に対して $U(\mathfrak{o}_n)$ の中心に属する. 実際 Det は

$$\mathrm{Det}(g\Phi g^{-1}; u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{Det}(\Phi; u_1, \ldots, u_n) \qquad (g \in GL_n(\mathbf{C}))$$

という対称性を持ち, $\mathbf{F}$ は

$$(\mathrm{Ad}(g)F_{ij})_{1\le i,j\le n} = {}^t g \mathbf{F}\, {}^t g^{-1} \qquad (g \in O_n := \{x \in GL_n(\mathbf{C})\ ;\ {}^t x S_n x = S_n\})$$

という共変性を持つので, $\mathrm{Det}(\mathbf{F}; u_1, \ldots, u_n)$ は中心元であることがわかる. しかし, 対称化された行列式は列の添字に対称群が作用しているため, Harish-Chandra 同型による像は split 実現のもとでも一般には計算が困難である. $d \in \{1, \ldots, n\}$ に対して, 次のように特別な対角シフトを使って中心元 $C_n^{\mathrm{Det}}(u)$ を,

$$C_n^{\mathrm{Det}}(u) = \mathrm{Det}(uI_d - \mathbf{F}_I; \tilde{\mathfrak{h}}_n),$$

と定めた場合, その Harish-Chandra 同型による像が知られている [Ito00].

$$\overline{\gamma}(C_n^{\mathrm{Det}}(u)) = \begin{cases} (u^2 - F_{11}^2) \cdots (u^2 - F_{mm}^2) & (n = 2m), \\ u(u^2 - F_{11}^2) \cdots (u^2 - F_{mm}^2) & (n = 2m+1). \end{cases}$$

これは $C_n(u)$ の像と一致している. 従って次の命題を得る.

Proposition 12. 行列式を用いて構成した中心元 $C_n(u)$ と対称化された行列式を用いて構成した中心元 $C_n^{\mathrm{Det}}(u)$ は等しい. □

Remark 13. ここでの証明は Harish-Chandra 同型の像を比較するものであったが, $U(\mathfrak{o}_n)$ の中で直接 2 種類の中心元が一致することを示す証明も, 伊藤稔氏により与えられている. □

参考文献

[Cap90] A. Capelli, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37. MR NO-NUMBER Capelli90

[HU91] Roger Howe and Tōru Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), no. 3, 565–619. MR MR1116239 (92j:17004)

[Ito00] M. Itoh, *Capelli elements for the orthogonal Lie algebras*, J. Lie Theory **10** (2000), no. 2, 463–489. MR 2001k:17016

[IU01] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, Compositio Math. **127** (2001), no. 3, 333–359. MR 2002d:17011

[Mol95] A. Molev, *Sklyanin determinant, Laplace operators, and characteristic identities for classical Lie algebras*, J. Math. Phys. **36** (1995), no. 2, 923–943. MR 96e:17024

[Wac] Akihito Wachi, *Central elements in the universal enveloping algebras for the split realization of the orthogonal Lie algebras*, to appear in Letters in Mathematical Physics.

[Žel73] D. P. Želobenko, *Compact Lie groups and their representations*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973, Translated from the Russian by Israel Program for Scientific Translations, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 40. MR 57 #12776b